Linear Algebra

[KOMS120301] - 2023/2024

15.1 - Ruang Hasil Kali Dalam dan Ortogonalitas

Dewi Sintiari

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 15 (Desember 2023)

Tujuan pembelajaran

Setelah perkuliahan ini, Anda diharapkan mampu:

1. menjelaskan konsep hasilkali dalam secara umum (khususnya ditinjau dari 4 aksioma hasilkali dalam);
2. menjelaskan konsep ruang hasil kali dalam;
3. menghitung hasil kali dalam dari dua vektor dalam suatu ruang;
4. menghitung hasil kali dalam tertimbang dari dua vektor;
5. hitung sudut dua vektor dalam bentuk hasil kali dalam;
6. menghitung jarak dua vektor;
7. menunjukkan bahwa dua vektor ortogonal atau tidak.

Bagian 1: Hasil kali dalam & ruang hasil kali dalam

Hasil kali dalam

Suatu hasil kali dalam pada ruang vektor real* V adalah fungsi yang menghubungkan bilangan real u, v dengan setiap pasangan vektor di V sedemikian rupa sehingga aksioma berikut terpenuhi untuk semua vektor u, v, dan w di V dan semua skalar k.

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ **[Aksioma simetri]**
2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ **[Aksioma penjumlahan]**
3. $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ **[Aksioma homogenitas]**
4. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ and $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ iff $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ **[Aksioma positif]**

Ruang vektor real dengan hasil kali dalam disebut ruang hasil kali dalam real.

*Ruang vektor real adalah ruang vektor yang bidang skalarnya adalah bidang real.

Hasil kali dalam Euclid

hasil kali dalam dari dua vektor **u** dan **v** pada $\mathbb{R}^n$ didefinisikan sebagai:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Ini disebut Perkalian dalam Euclidean (hasil kali dalam standar).

Inner product vs dot product:

Sifat aljabar dari ruang hasil kali dalam

Jika $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ adalah vektor-vektor pada ruang hasilkali dalam real V, dan jika $k \in \mathbb{R}$, maka:

1. $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} + \mathbf{0} \rangle = 0$
2. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$
3. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u} + \mathbf{w} \rangle$
4. $\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle$
5. $k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} + k\mathbf{v} \rangle$

Latihan: Buktikan teorema tersebut

Hasil kali dalam berbobot

Jika $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{R}$ dan $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ adalah vektor-vektor dalam $\mathbb{R}^n$. Kemudian:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = w_1 u_1 v_1 + w_2 u_2 v_2 + \cdots + w_n u_n v_n$$

disebut hasil kali dalam Euclidean tertimbang dengan bobot $w_1, w_2, \ldots, w_n$.

Example

Latihan 1: Perhitungan dengan hasil kali dalam Euclidean tertimbang

Hasil kali dalam standar pada M_{nn}

Diketahui $\mathbf{u} = U$ dan $\mathbf{v} = V$, matriks dalam ruang vektor M_{nn}. standard product pada M_{nn} didefinisikan sebagai:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathrm{tr}(U^T V)$$

Example

Untuk $\mathbb{R}^2$, dan matriks:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$$

Hasil kali dalam standar dari U dan V adalah:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathrm{tr}(U^T V) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4$$

Latihan: Buktikan bahwa keempat aksioma hasil kali dalam berlaku!

Evaluasi hasil kali dalam pada P_n

Misalkan $\mathbf{p} = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ dan $\mathbf{q} = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ adalah polinomial dalam P_n.
$x_0, x_1, \ldots, x_n$ adalah bilangan real berbeda.

hasil kali dalam evaluation pada P_n pada $x_0, x_1, \ldots, x_n$ didefinisikan sebagai:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = p(x_0)q(x_0) + p(x_1)q(x_1) + \cdots + p(x_n)q(x_n)$$

Latihan: Buktikan bahwa keempat aksioma hasil kali dalam berlaku!

Latihan 2: Perhitungan dengan hasil kali dalam Euclidean tertimbang

Part 2: Sudut dan Ortogonalitas dalam Ruang hasil kali dalam

Norma vektor dan sifat aljabar

Misalkan V adalah ruang hasil kali dalam yang nyata. Kemudian: norma dari $\mathbf{v} \in V$:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Teorema (Sifat norma vektor)

If $\mathbf{u}$ *and* $\mathbf{v}$ *are vectors in a real inner product space* V*, and if* $k \in \mathbb{R}$*, then:*

1. $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ *where equality holds iff* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$*;*
2. $\|k\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\|$.

Latihan: Buktikan teorema tersebut

Jarak dua vektor dan sifat aljabar

Misalkan V adalah ruang hasil kali dalam yang nyata. Kemudian: jarak antara dua vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{\|\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}\|}$$

Pertanyaan: Bisakah anda menghubungkan definisi di atas dengan definisi jarak yang telah kita bahas sebelumnya?

Teorema (Sifat jarak)

Jika $\mathbf{u}$ *dan* $\mathbf{v}$ *adalah vektor-vektor dalam ruang hasil kali dalam riil* V*, dan jika* $k \in \mathbb{R}$*, maka:*

1. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$;
2. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$ *di mana kesetaraan berlaku jhj* $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Latihan: Buktikan teorema tersebut

Jarak antara dua vektor di $\mathbb{R}^n$

Ingatlah bahwa:

Sudut antara dua simpul $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^n$ didefinisikan sebagai:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\right)$$

Teorema (Cauchy-Schwarz inequality)

Jika $\mathbf{u}$ *dan* $\mathbf{v}$ *adalah vektor-vektor pada ruang hasil kali dalam real* V*, maka:*

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

Perhatikan bahwa teorema tersebut menyiratkan bahwa sudut antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ berkisar antara 0 dan $\pi = 180^o$.

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

Latihan: Buktikan pertidaksamaan Cauchy-Schwarz!

Sudut antara dua vektor dalam ruang vektor nyata

Ketaksamaan Cauchy-Schwarz mengakibatkan:

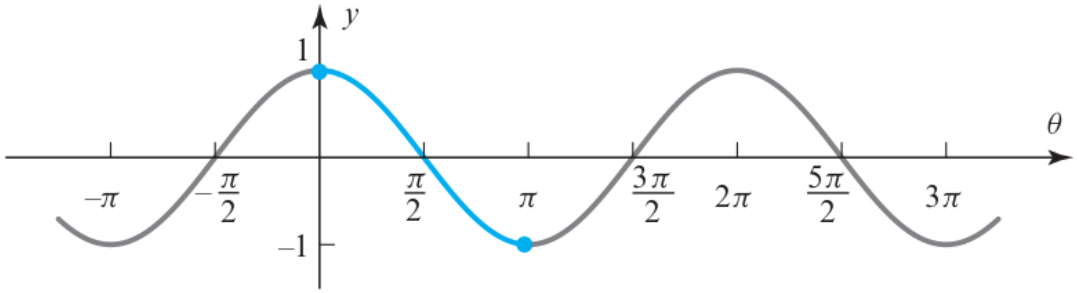
$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq 1$$

yang berarti ada <u>sudut unik θ</u> yang mana:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \quad \text{and} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Dengan demikian,

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}\right)$$



Sudut vektor di M_{22}

Pada contoh sebelumnya, kita diberikan dua vektor di M_{22}, yaitu $\mathbf{u} = U$ dan $\mathbf{v} = V$, dimana:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$$

Bagaimana cara mencari sudut antara **u** dan **v**?

Solusi:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\right)$$

- Compute $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 1(-1) + 2(0) + 3(3) + 4(2) = -1 + 0 + 9 + 8 = 16$$

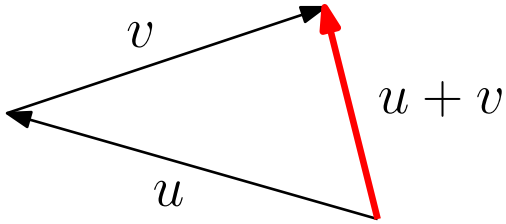
Apa yang dapat kamu simpulkan tentang sudut dua vektor pada ruang hasilkali dalam?

Ketaksamaan segitiga

Teorema (Ketaksamaan segitiga pada norma dan jarak)

Jika $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, *dan* $\mathbf{w}$ *adalah vektor-vektor pada ruang hasilkali dalam rruang* V, *dan* $k \in \mathbb{R}$, *maka:*

1. $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$
2. $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u},\mathbf{w}) + d(\mathbf{w},\mathbf{v})$



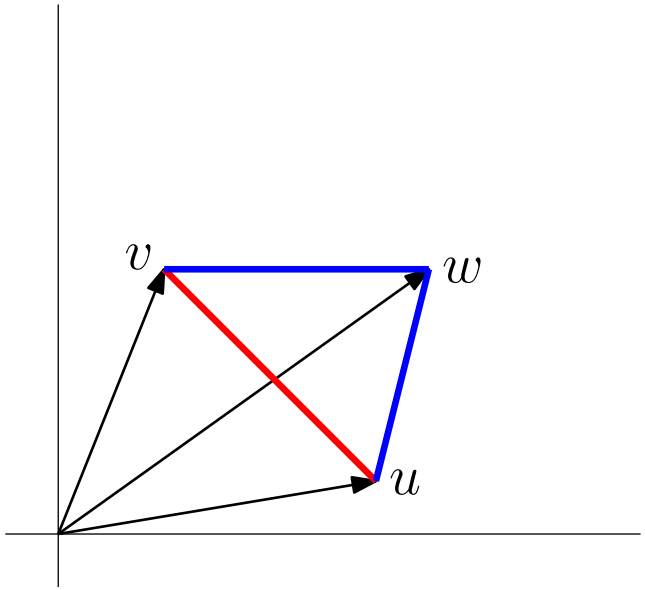


Figure: Illustration of triangular inequality

Definisi

Dua vektor $\mathbf{u}$ *dan* $\mathbf{v}$ *dalam ruang hasil kali dalam* V *disebut* *ortogonal* *jika* $\langle u, v \rangle = 0$.

Latihan 1: Ortogonalitas tergantung pada produk bagian dalam

Diberikan dua vektor $\mathbf{u} = (1, 1)$ dan $\mathbf{v} = (1, -1)$.

- $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah w.r.t ortogonal. hasil kali dalam Euclidean pada $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1)(1) + (1)(-1) = 0$$

- tapi bukan w.r.t ortogonal. produk dalam Euclidean tertimbang: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1 v_1 + 2u_2 v_2$, since:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3(1)(1) + 2(1)(-1) = 1 \neq 0$$

Latihan 2: Vektor ortogonal di M_{22}

Ingat kembali definisi hasil kali dalam pada M_{nn} :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \text{tr}(U^T V)$$

Apakah matriks-matriks berikut ini ortogonal?

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solusi:

$$\langle U, V \rangle = 1(0) + 0(2) + 1(0) + 1(0) = 0$$

Oleh karena itu, U dan V ortogonal.

Latihan 3: Vektor ortogonal di P_2

Definisikan produk dalam pada P_2 sebagai berikut.

Untuk $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in P_2$, definisikan:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\ dx$$

Misal $\mathbf{p} = x$ dan $\mathbf{q} = x^2$. Maka:

$$\|\mathbf{p}\| = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle^{1/2} = \left[\int_{-1}^{1} xx\ dx\right]^{1/2} = \left[\int_{-1}^{1} x^2\ dx\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\|\mathbf{q}\| = \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle^{1/2} = \left[\int_{-1}^{1} x^2x^2\ dx\right]^{1/2} = \left[\int_{-1}^{1} x^4\ dx\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^{1} xx^2\ dx = \int_{-1}^{1} x^3\ dx = 0$$

Oleh karena itu, vektor-vektor $\mathbf{p} = x$ dan $\mathbf{q} = x^2$ adalah ortogonal relatif terhadap hasil kali dalam.

Latihan

Buktikan Teorema Umum Pythagoras berikut

Jika **u** dan **v** adalah vektor ortogonal pada ruang hasilkali dalam real, maka:

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

bersambung...